分散分析による１自由度仮説の検定

モニタ・DM・統計解析　受託及び派遣

06-6384-3350

株式会社アグレックス
BPO大阪事業部
隈本秀樹

例題(3×3配置) 1

40 + Fa(行) + Fb(列) + (交互作用)

要 因 Fb

効果	-10	0	10	平均
-1	(+1) 28,29,30,31,32 n=5 mean=30	(-1) 37,39 n=2 mean=38	(+1) 50 n=1 mean=50	34.5
0	(-1) 29 n=1 mean=29	(+1) 39,40,41,42,43 n=5 mean=41	(-1) 49 n=1 mean=49	40.4
2	(+1) 33 n=1 mean=33	(-1) 40,42 n=2 mean=41	(+1) 51,52,53,54,55 n=5 mean=53	47.5
平均	30.3	40.3	52.0	

要 因 Fa

1 2

6 7

SE=1.5

例題(3✕3配置) 2

分散分析表(タイプⅡ)

要　因	SS	df	MS	F	P
要因Fa	25.9	2	13.0	5.34	0.0189
要因Fb	1002.2	2	501.1	206.34	<0.0001
交互作用	15.5	4	3.9	1.59	0.2306
残差	34.0	14	2.4		

Bonferroni (Dunn) t tests

対比	平均値の差	95%下限	95%上限	有意性
水準1と2の差	5.93	3.74	8.12	***
水準2と3の差	7.07	4.88	9.26	***
水準3と1の差	-13.00	-15.12	-10.88	***

要因Fbの効果を除いていない　→　タイプⅠ

t 検定

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F	P
要因Fa	SSA	dfa	MSA	Fa	Pa
要因Fb	SSB	dfb	MSB	Fb	Pb
交互作用	SSAB	dfab	MSAB	Fab	Pab
残差	SSE	dfe	MSE		

水準1と水準2間の平均値の差の検定

$$t = \frac{(\Sigma_{jk} y_{1jk} / n_{1}. - \Sigma_{jk} y_{2jk} / n_{2}.) / \sqrt{(1/n_{1}. + 1/n_{2}.)}}{\sqrt{(MSE)}}$$

y_{ijk}：要因Faの第 i 水準、要因Fbの第 j 水準の第 k 観測値

$n_{i}.$：要因Faの第 i 水準の全観測値数

論文の説明

考え方	分散分析平方和	多重比較	結果の解釈
タイプＩ	帰属不明の平方和を取り込む	平均値の差の検定 多重比較	他要因の効果を含む可能性あり
タイプII	帰属不明の平方和を除外する	この論文	安全側の解釈
タイプIII	線形仮説の制約付最小二乗法による観測値空間の分割･平方和	線形仮説の検定(対比)	タイプＩ、IIとは別角度の解釈

統計

分散分析(タイプII)による多重比較を紹介をする。

医薬

他の要因Fbの可能性のある効果を除いた上で、興味のある要因Faの水準間の比較を行う。

検定統計量

2元配置モデル

$Y=1\mu+A\alpha+B\beta+C\gamma+\varepsilon$

μ:全平均　　　　1=(1 1 ･･･1)

α:要因Faの効果　　A:要因Faに対するデザイン行列部分

β:要因Fbの効果　　B:要因Fbに対するデザイン行列部分

γ:交互作用効果　　C:交互作用に対するデザイン行列部分

x_1:Aの列ベクトルの一次結合

$Y=1\mu+x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_I\eta_I+B\beta+C\gamma+\varepsilon$

測定値空間の分割

$V_{x_1|B}=L(1, x_1, B)\cap L(1, B)^{\perp}$, $V_{A|x_1,B}= L(1, A, B)\cap L(1, x_1, B)^{\perp}$

$V=V_0 + V_{x_1|B} + V_{A|x_1,B} + V_B + V_C + V_E$

$V_{x_1|B}$ と $V_{A|x_1,B}$の分割･････*タイプI*　　($V_{x_1|B}, x_2, \ldots, x_I$ではない)

$V_{A|B}$ の作り方･･････････････*タイプII*

検定統計量

$F_{x_1}=\|p_{\mathbf{Y}}(V_{x_1|B})\|^2 \ / \ \{\|p_{\mathbf{Y}}(V_E)\|^2/(N-IJ)\}$

2×2配置の仮説平方和(タイプII)

y_{ijk}：要因Faの第 i 水準、要因Fbの第 j 水準の第 k 観測値

n_{ij}：要因Faの第 i 水準、要因Fbの第 j 水準における観測値数

$n_{i\cdot} = \Sigma_j n_{ij}$ $\qquad n_{\cdot j} = \Sigma_i n_{ij}$

$E_{ij} = \Sigma_k y_{ijk} / n_{ij}$

$$SSA = \frac{\{n_{\cdot 2} n_{11} n_{21} (E_{11} - E_{21}) + n_{\cdot 1} n_{12} n_{22} (E_{12} - E_{22})\}^2}{n_{\cdot 1} n_{\cdot 2} (n_{21} n_{11} n_{\cdot 2} + n_{12} n_{22} n_{\cdot 1})}$$

n_{11} E_{11}	n_{12} E_{12}	$n_{1\cdot}$ $E_{1\cdot}$
n_{21} E_{21}	n_{22} E_{22}	$n_{2\cdot}$ $E_{2\cdot}$
$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	

$$t^2 = \frac{(E_{1\cdot} - E_{2\cdot})^2 / (1/n_{1\cdot} + 1/n_{2\cdot})}{MSE}$$

例題(3×3配置) 3

40 + Fa(行) + Fb(列) + (交互作用)

		-10	0	10	行平均	
	-1	mean=30	mean=38	mean=50	34.5	
1		-1	3	-1		6
	0	mean=29	mean=41	mean=49	40.4	
2		4	0	4		7
	2	mean=33	mean=41	mean=53	47.5	
	列平均	30.3	40.3	52.0		

要因Fbの効果を除く → タイプII

本論文の検定の特徴

仮説平方和は分散分析の仮説平方和を超えない。分散分析と整合性がとれる。

新しい多重比較は他の要因の考えられる効果を除外したうえで、興味のある要因の水準間の比較をおこなう。

t 検定の問題点

t^2 の分子平方和は本論文の検定の仮説平方和より大きいか等しい。例数が異なる場合、t は過大に計算される可能性がある。

計算方法 1

イ.A

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & A & & & B & & & C & & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & & & 1 & & & 1 & & & \\
: & : & & & : & & & & & & \\
1 & 1 & & & 1 & & & 1 & & & \\
1 & 1 & & & & 1 & & & 1 & & \\
: & : & & & & : & & & & & \\
1 & 1 & & & & 1 & & & 1 & & \\
1 & 1 & & & & & 1 & & & : & \\
: & : & & & & & : & & & : & \\
1 & 1 & & & & & 1 & & & : & \\
1 & & 1 & & 1 & & & & & : & \\
: & & : & & : & & & & & : & \\
1 & & 1 & & 1 & & & & & : & \\
1 & & 1 & & & 1 & & & & : & \\
: & & : & & & : & & & & : & \\
1 & & 1 & & & 1 & & & & : & \\
1 & & 1 & & & & 1 & & & : & \\
: & & : & & & & : & & & : & \\
1 & & 1 & & & & 1 & & & : & \\
1 & & & 1 & 1 & & & & & : & \\
: & & & : & : & & & & & : & \\
1 & & & 1 & 1 & & & & & : & \\
1 & & & 1 & & 1 & & & & : & \\
: & & & : & & : & & & & : & \\
1 & & & 1 & & 1 & & & & : & \\
1 & & & 1 & & & 1 & & & & 1 \\
: & & & : & & & : & & & & : \\
1 & & & 1 & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

ロ.x_1

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
1 & x1 & & B & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1/n1 & 1 & & \\
: & : & : & & \\
1 & 1/n1 & 1 & & \\
1 & 1/n1 & & 1 & \\
: & : & & : & \\
1 & 1/n1 & & 1 & \\
1 & 1/n1 & & & 1 \\
: & : & & & : \\
1 & 1/n1 & & & 1 \\
1 & -1/n2 & 1 & & \\
: & : & : & & \\
1 & -1/n2 & 1 & & \\
1 & -1/n2 & & 1 & \\
: & : & & : & \\
1 & -1/n2 & & 1 & \\
1 & -1/n2 & & & 1 \\
: & : & & & : \\
1 & -1/n2 & & & 1 \\
1 & & 1 & & \\
: & & : & & \\
1 & & 1 & & \\
1 & & & 1 & \\
: & & & : & \\
1 & & & 1 & \\
1 & & & & 1 \\
: & & & & : \\
1 & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

計算方法 2

イ.A

分散分析表

Source	SS	df	MS	F	P
要因Fa	SSA	dfa	MSA	Fa	Pa
要因Fb	SSB	dfb	MSB	Fb	Pb
交互作用	SSAB	dfab	MSAB	Fab	Pab
残差	SSE	dfe	MSE		

ロ.x_1

分散分析表

Source	SS	df	MS	F	P
水準1と2の差	SSA_12	dfa	MSA	Fa	Pa
要因Fb	SSB	dfb	MSB	Fb	Pb
残差	SSE	dfe	MSE		

X_2 SSA_23

X_3 SSA_31

水準間の差の多重比較

Source	SS	df	MS	F	test
水準1と2の差	SSA_12	1	MSA_12	F_12	*
水準2と3の差	SSA_23	1	MSA_23	F_23	*
水準3と1の差	SSA_31	1	MSA_31	F_31	*
残差	SSE	dfe	MSE		

F(0.017)=XXX

例題(3×3配置) 4

分散分析表(タイプII)　　(ロ.X_1のデザイン行列使用)

Source	DF	Type II SS	Mean Square	F Value	Pr>F
X1	1	3.642	3.642	0.96	0.3386
F_B	2	1526.298	763.149	201.98	<.0001

水準間の差の多重比較

要　因	SS	df	MS	F	P
水準1と2の差	3.642	1	3.642	1.499	ns
水準2と3の差	7.621	1	7.621	3.138	ns
水準3と1の差	25.714	1	25.714	10.586	*
残差	34.000	14	2.429		

F(0.017;1,14)=7.331

医薬品のデータ解析について

要因が複数あるとき、他の要因に属する可能性のある効果を排除したうえで、興味のある要因の水準間比較を行うのは、特に医薬品の効果の有意差を検定するうえで重要となる。

例数が異なる場合、従来の多重比較の t は他の要因の効果を含む可能性があり、過大な値になっている可能性があると考えられる。

タイプIIIに対する検討課題

1. 仮説平方和は他の要因の効果(共線性の影響)を除く形になっているか。
2. 対比の検定は、水準間では他の要因の効果を除く形になっているのか、水準内の自由度分割(注分解でない)ではその対比が他の対比の影響を受けない形になっているか。

訂正

論文中タイプIIの平方和を誤差平方和と誤差平方和の差と記述した個所がありますが、他のタイプについても言えることなので訂正します。